

한국 은행산업의 *CoVaR* 추정

최 필 선

(건국대학교 국제무역학과 조교수)

민 인 식

(경희대학교 경제학과 부교수)

Estimating the *CoVaR* for Korean Banking Industry

Pilsun Choi

(Assistant Professor, Department of International Trade, Konkuk University)

Insik Min

(Associate Professor, Department of Economics, Kyung Hee University)

* 민인식: 교신저자

** 본 논문은 2009년도 건국대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임.

*** 최필선: (e-mail) pchoi@konkuk.ac.kr, (address) Konkuk University, 1 Hwayang-dong, Gwangjin-gu, Seoul 143-701, Korea

민인식: (e-mail) imin@khu.ac.kr, (address) Kyung Hee University, 1 Dongdaemoon-gu, Seoul 130-701, Korea

• Key Word: *CoVaR*(*CoVaR*), *Var*(*Var*), 시스템리스크(Systemic Risk), 분위수 회귀(Quantile Regression), S_U -정규분포(S_U -normal Distribution)

• JEL Code: C16, G0, G1

• Received: 2009. 11. 27

• Referee Process Started: 2009. 12. 3

• Referee Reports Completed: 2010. 9. 3

ABSTRACT

The concept of *CoVaR* introduced by Adrian and Brunnermeier (2009) is a useful tool to measure the risk spillover effect. It can capture the risk contribution of each institution to overall systemic risk. While Adrian and Brunnermeier rely on the quantile regression method in the estimation of *CoVaR*, we propose a new estimation method using parametric distribution functions such as bivariate normal and S_U -normal distribution functions. Based on our estimates of *CoVaR* for Korean banking industry, we investigate the practical usefulness of *CoVaR* for a systemic risk measure, and compare the estimation performance of each model. Empirical results show that bank makes a positive contribution to system risk. We also find that quantile regression and normal distribution models tend to considerably underestimate the *CoVaR* (in absolute value) compared to S_U -normal distribution model, and this underestimation becomes serious when the crisis in a financial system is assumed.

Adrian and Brunnermeier(2009)가 제안한 *CoVaR*는 위기의 파급효과를 측정하는 데 유용한 도구이다. 특히 어떤 금융기관이 금융시스템에 대해 어느 정도의 잠재적 리스크를 갖고 있는지를 측정할 수 있다. 본 연구는 *CoVaR*를 추정하는데 있어서 Adrian and Brunnermeier (2009)가 사용한 분위수 회귀방식이 아니라 이변량 정규분포 및 S_U -정규분포 등 모수적 분포함수를 이용하여 *CoVaR*를 추정하는 방법을 제안한다. 이들 모형을

이용하여 국내 은행산업을 대상으로 *CoVaR*를 추정하고, 이를 통해 *CoVaR*의 현실적 유용성을 점검함과 동시에 각 모형들의 추정 성과를 비교한다. 추정 결과, 은행들이 시스템리스크에 양(+)의 기여를 하고 있는 것으로 나타났다. 모형별로는 S_U -정규분포모형에 비해 분위수 회귀와 정규분포모형이 *CoVaR*를 (절댓값에서) 크게 과소평가하며, 위기수준을 높일수록 그 정도가 심해지는 것으로 나타났다.

1. 서론

금융기관이 안고 있는 시장리스크를 측정하는 수단으로 대표적인 것이 VaR(Value-at-Risk)이다. 이는 (어떤 신뢰 수준 하에서) 발생 가능한 최대 손실로 정의된다. VaR는 그 유용성에도 불구하고 많은 한계를 갖고 있다. 그중 Adrian and Brunnermeier(2009)가 지적한 부분은 VaR가 금융기관의 리스크를 금융시스템 전체적인 맥락이 아니라 개별적으로 측정한다는 점이다. 특히 2008년 글로벌 금융위기에 목격했듯이 개별 금융기관의 파산이 금융산업 전체로 확산되고, 나아가서는 글로벌 위기로까지 전개되는 것을 감안했을 때 개별 금융기관 자체의 리스크에만 초점을 맞추어서는 안 된다는 것이다. 금융감독당국으로서는 개별 금융기관의 위기보다는 금융시스템 전체의 위기를 방지하는 것이 훨씬 중요함에도 불구하고, 그 모니터링 수단으로써 개별 금융기관의 리스크를 대변하는 VaR를 이용하는 것은 문제이다. 어떤 두 금융기관이 VaR는 동일하더라도 금융시스템에 미치는 잠재적 리스크는 크게 다를 수 있기 때문이다.

이러한 맥락에서 Adrian and Brunnermeier (2009)가 제안한 것이 CoVaR이다. 이는 금융기관이 금융시스템에 대해 어느 정도의 잠재적 리스크를 갖고 있는지를 측정하는 수단이다. CoVaR는 조건부 (conditional) VaR의 의미로서 어떤 금융기관의 수익이 극히 나쁜 상황을 전제로 하여 금융시스템의 리스크를 측정한 것이다. 이를 통해 해당 금융기관이 시스템 리스크에 기여하는 정도를 파악할 수 있게 된다. 이런 점에서 CoVaR는 해당 금융기관의 시스템리스크를 측정하는 수단 (system risk measure)이 될 수 있다. 이는 곧 CoVaR가 금융감독당국의 거시건전성 (macro-prudential) 감독수단으로 유용하게 활용될 수 있다는 것을 의미한다.¹⁾ Adrian and Brunnermeier(2009)가 지적한 대로 개별 금융기관의 위기가 금융권 전체로 확산되고 그것이 다시 실물경제에 대한 신용 및 자본 공급을 왜곡시킴으로써 경제위기로 발전된다는 점을 고려하면, 금융기관들의 시스템리스크를 제대로 포착할 수 있는 측정수단이 거시건전성 규제의 가장 기초라 할 수 있다. 한국은행(2010) 역시 최근 발간된 금융안정보고서에서 금번 위기를 계기로 금융시스템의 안정성 유지 및 실물경제의 지속 성장을 위해서는 시스템리스크를 조기에 포착하고 거시건전성 정책을 통해 이를

1) 글로벌 금융위기를 막기 위한 금융산업의 감독 및 규제와 관련된 논의는 Brunnermeier et al.(2009)을 참조하라.

완화·축소시키는 것이 긴급하다는 인식이 확산되고 있다고 보고하고 있다. 한국은행(2010)은 거시건전성 감독에서 금융회사의 상호연계성을 제대로 분석하는 것이 중요하다고 지적하면서 그 방법 중의 하나로 Adrian and Brunnermeier(2009)의 *CoVaR* 개념을 응용한 금융회사 간 부도위험 연계성 분석(Co-Risk model)을 소개하기도 했다(이승환[2010] 참조).²⁾

한편, 최근 G20에서는 금융위기 처리 비용을 금융회사에 부과하지는 취지의 은행세(bank levy) 부과 문제가 주요 이슈로 등장하고 있다. 은행세 부과 시 유발될 수 있는 도덕적 해이나 규제차익을 최소화하기 위해서는 시스템리스크에 기여하는 정도에 따라 은행의 부담을 차등화하는 것이 바람직하다. 이러한 원칙은 예금보험제도에도 그대로 적용되는바, 위험도의 차이에 따라 예금보험료를 차등 부과하는 것이 필요하다. 이처럼 은행세나 예금보험료를 산정할 때 금융기관들의 위험도를 개별 금융기관 자체로 평가하기보다는 시스템 전체에 대한 위험도의 개념으로 평가하는 것이 바람직하다. 이런 경우에 시스템리스크의 측정수단으로 *CoVaR*가 활용될 수 있는 것이다.

*CoVaR*는 비단 시스템리스크 측정수단

으로서뿐만 아니라 다양한 목적으로 사용될 수 있다. 예를 들어, 위의 설정과는 정반대로 감독당국이 아니라 금융기관(혹은 펀드매니저)의 입장에서 보면, 시스템 위기가 닥쳤을 때 해당 금융기관(혹은 펀드)에 어느 정도의 파급효과가 미칠지를 분석하는 것이 중요하다. 또 다른 예로 은행권의 위기가 증권산업에 미치는 파급효과라든가, 혹은 경제 전체의 위기가 각 분야(산업)에 미치는 파급효과 등을 분석할 필요가 있는데, 이럴 때 유용하게 사용할 수 있는 것이 *CoVaR*의 개념이다.

본 연구는 이처럼 위기의 파급효과를 측정하는 데 유용하게 사용될 수 있는 *CoVaR*의 개념을 소개하는 한편, Adrian and Brunnermeier(2009)의 연구를 방법론 측면에서 한층 발전시키고자 한다. 즉, *CoVaR* 추정 방법론에 있어서 Adrian and Brunnermeier(2009)가 사용한 분위수 회귀(quantile regression)방식이 아니라 모수적(parametric) 분포함수를 이용하는 방법을 제안한다.³⁾ 구체적으로는 이변량(bivariate) 정규분포 및 S_U -정규분포함수를 이용하여 시간에 대해 조건부(conditional) 및 비조건부(unconditional)로 *CoVaR*를 추정하는 모형을 소개한다. 이

2) Fong et al.(2009)이나 IMF(2009)도 비슷한 적용을 시도하고 있다.

3) Adrian and Brunnermeier(2009)의 *CoVaR*에 대해서는 이미 국내에 그 개념(여은정[2008])과 분위수 회귀에 의한 추정방법(김진호·김윤정[2009])이 소개되었다. 그러나 모수적 분포함수를 이용하여 조건부 및 비조건부로 *CoVaR*를 추정하는 모형에 대해서는 아직까지 국내외에서 연구가 이루어지지 않은 것으로 생각된다.

들 분포함수를 사용할 경우 CoVaR의 계산이 매우 간단하다는 장점이 있다. 특히 Johnson(1949a, 1949b)의 S_U -정규분포함수는 다변량 분포함수 중 가장 유연한 것 중의 하나로서 금융시계열 데이터의 초과첨도(excess kurtosis)와 비대칭성(asymmetry)을 잘 표현할 수 있다는 장점도 지니고 있다. 본 논문에서는 이들 모수적 분포함수를 사용하여 조건부 및 비조건부 CoVaR를 추정하는 모형을 제시한다.⁴⁾ 그런 다음 이들 모형을 이용하여 국내 은행산업을 대상으로 CoVaR를 추정하고, 이를 통해 CoVaR의 현실적 유용성을 점검하고, 동시에 각 모형들의 추정 성과를 서로 비교한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 우선 제II장에서는 CoVaR의 추정방법으로 분위수 회귀 추정과 모수적 분포함수를 이용한 추정에 대해 살펴본다. 모수적 분포함수모형에 있어서는 비조건부 모형을 먼저 제시하고, 이어 GARCH(generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) 모형을 이용하여 시간가변 CoVaR를 추정하는 모형을 제시한다. 이러한 모형을 이용하여 제III장에서는 국내 9개 은행의

주가와 KOSPI 지수의 일별(daily) 데이터를 이용하여 각 은행들의 시스템리스크 기여도로서의 CoVaR를 추정하고, 그 결과를 비교한다. 마지막으로 제IV장에서는 연구 결과를 요약하고 시사점을 생각해 본다.

II. CoVaR 추정모형

1. 분위수 회귀 추정

어떤 금융기관(혹은 산업) i 의 수익률 변수를 y_i 라 할 때, 극단적 손실확률을 p 로 설정한 VaR_i^p 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Pr[y_i \leq VaR_i^p] = p \quad (1)$$

Adrian and Brunnermeier(2009)가 제안한 $CoVaR_{i|j}^p$ 는 조건부(conditional) VaR의 개념으로서, $y_j = VaR_j^p$ 인 상황에서 y_i 의 VaR_i^p 로 정의된다. 즉, 다음과 같다.⁵⁾

4) 시간가변모형에 있어서 Adrian and Brunnermeier(2009)는 모형의 외부에서 주어지는 상황변수(state variable)를 이용하여 수익률을 예측하는 방식의 모형을 제시한 데 반해, 우리는 일반적인 GARCH 모형의 구조에 입각하여 수익률의 시간가변 변동성 및 상관성을 직접 모형화한다. 모수적 분포함수를 사용할 경우 이처럼 시간가변 변동성과 상관성을 쉽게 모형화할 수 있는 것이 장점이다. 참고로 Adrian and Brunnermeier(2009)가 시간가변모형에서 사용한 상황변수는 시카고옵션거래소의 변동성지수(VIX), 단기 금리스프레드, 재무부증권(3개월) 수익률 변화 등을 포함하고 있다.

5) 일반적으로 VaR는 손실(loss)을 양(+)으로 하여 표현하는 것이 관행이나 본 논문에서는 이러한 관행을 따르지 않고 Adrian and Brunnermeier(2009)가 행한 대로 손실이 음수로 표현되게끔 정의하였다.

$$\Pr [y_i \leq Co VaR_i^p | y_j = VaR_j^p] = p \quad (2)$$

$\Delta Co VaR_{i|j}^p$ 는 식 (1)과 (2)를 기초로 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta Co VaR_{i|j}^p = Co VaR_{i|j}^p - VaR_i^p \quad (3)$$

위의 식 (2)와 같이 정의된 $Co VaR_{i|j}^p$ 를 분위수 회귀를 통해 추정하는 가장 간단한 모형은 Adrian and Brunnermeier (2009)가 제안한 분위수 회귀방식으로서 다음의 회귀모형에서 출발한다.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 y_j + \epsilon_i$$

여기에서 ϵ_i 는 오차항이다. 분위수 회귀 추정은 다음의 최소화과정을 통해 얻어진다.⁶⁾

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum \begin{cases} p |y_i - \beta_0 - \beta_1 y_j|, & (y_i - \beta_0 - \beta_1 y_j) \geq 0 \text{ 일 때} \\ (1-p) |y_i - \beta_0 - \beta_1 y_j|, & (y_i - \beta_0 - \beta_1 y_j) < 0 \text{ 일 때} \end{cases}$$

주어진 p 에서 분위수 회귀 추정식이 다음과 같다고 하자.

$$\hat{y}_i^p = \hat{\beta}_0^p + \hat{\beta}_1^p y_j$$

이 경우 $Co VaR_{i|j}^p$ 는 간단히 다음이 된다.⁷⁾

$$Co VaR_{i|j}^p \equiv VaR_i^p | VaR_j^p = \hat{\beta}_0^p + \hat{\beta}_1^p VaR_j^p \quad (4)$$

2. 모수적 분포함수를 이용한 추정: 비조건부 모형

이번에는 분위수 회귀가 아니라 모수적 분포함수를 이용한 추정방법에 대해 알아보기로 한다. 본 연구에서는 정규분포와 S_U -정규분포의 두 가지를 이용한다. 정규분포에 대해서는 잘 알려져 있기 때문에 Johnson(1949a, 1949b)의 S_U -정규분포에 대해서만 간략히 소개한다.

S_U -정규분포는 정규분포 확률변수에 쌍곡선사인(hyperbolic sine; sinh)을 취한 것이다. z 를 표준정규변수라 할 때 S_U -정규변수는 다음으로 정의된다.

$$x = \sinh(\lambda + \theta z), \quad -\infty < x < \infty, \\ -\infty < \lambda < \infty, \quad \theta > 0$$

여기에서 쌍곡선사인의 정의는 $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ 이다. S_U -정규분

6) 분위수 회귀에 대한 보다 자세한 설명은 Koenker and Kevin(2001)을 참조하라.

7) 실제 추정에서는 식 (4)의 우변에 있는 VaR_j^p 를 어떻게 추정할지 선택해야 한다. 본 논문에서는 경험적(empirical 혹은 historical) VaR를 이용하였다. 즉, y_j 의 하위 $p\%$ 백분위수를 사용하였다.

포의 확률밀도함수 $f(x)$ 와 누적분포함수 $F(x)$ 는 각각 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

$$F(x) = \Phi(z)$$

여기에서 $z = \theta^{-1}[\sinh^{-1}(x) - \lambda]$, $J = \theta^{-1}(x^2 + 1)^{-1/2}$ 이고, $\Phi(\cdot)$ 은 표준 정규변수의 누적분포함수이다.

S_U -정규분포함수의 가장 큰 장점은, (i) 높은 유연성을 갖고 있어 금융시계열에서 발견되는 다양한 초과침도와 비대칭성을 잘 표현할 수 있다는 점과 (ii) 정규분포의 성질을 이용하여 다변량(multivariate) 차원으로 쉽게 확장될 수 있다는 점이다. 이러한 S_U -정규분포의 특성에 대해서는 최필선(2005)에 잘 소개되어 있기 때문에 이하에서는 다변량 S_U -정규분포의 함수형태만을 소개한다.

$N \times 1$ 확률변수 벡터 z 가 다변량 표준 정규분포를 따를 경우, z 의 결합밀도함수(joint density function)는 다음과 같다.

$$f(z) = (2\pi)^{-N/2} |R|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}z'R^{-1}z\right) \quad (5)$$

여기에서 R 은 비대각선 원소가 ρ_{ij} 인 상관계수 행렬이다. 이때 다변량 S_U -정규분포 벡터 x 는 이것의 각 원소들인 x_i 에

역쌍곡선사인을 취한 다음, 이것을 정규변수에 연결함으로써 얻어진다. 즉, $\sinh^{-1}(x_i) = \lambda_i + \theta_i z_i$ 이다. 이 경우 S_U -정규변수 x 의 결합밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = (2\pi)^{-N/2} |J|R|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}z'R^{-1}z\right) \quad (6)$$

여기에서 $z_i = \theta_i^{-1}[\sinh^{-1}(x_i) - \lambda_i]$ 이고, $J = \prod \theta_i^{-1}(x_i^2 + 1)^{-1/2}$ 이다.

이제 데이터가 이변량 정규분포 혹은 이변량 S_U -정규분포를 따를 경우의 CoVaR를 구하기로 한다. 이를 위해서는 각 분포함수하에서의 VaR 및 조건부(conditional) 분포함수를 알아야 한다. 앞에서 보았듯이 S_U -정규분포가 정규변수를 변환시킨 것이기 때문에 이하에서는 정규변수의 일반적(general) 함수에 대해 VaR, 조건부 분포함수, CoVaR 등을 구하여 이를 다시 S_U -정규분포의 경우에 적용하는 방식을 취하기로 한다. 우선 y_i 가 다음과 같이 표준정규변수 z_i 의 함수라 하자.

$$y_i = g_i(\lambda_i + \theta_i z_i)$$

이때 $\Pr[y_i < VaR_i^p] = p$ 로 정의되는 VaR_i^p 는 다음이 된다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

$$VaR_i^p = g_i(\lambda_i + \theta_i \Phi^{-1}(p)) \quad (7)$$

여기서 $g(\cdot)$ 는 단조증가의 변환함수 (transformation function)이다. 이제 $y_i = g_i(\lambda_i + \theta_i z_i)$ 이고, $y_j = g_j(\lambda_j + \theta_j z_j)$ 이며, z_i 와 z_j 의 상관계수가 ρ_{ij} 인 경우에 대해 y_j 가 주어졌을 때 조건부 확률변수와 $Co VaR_{i|j}^p$ 를 구해 보자. 이를 위해 우선 z_i 의 z_j 에 대한 조건부 확률변수를 알아야 하는데, 이는 다음과 같다.

$$z_i | z_j = \rho_{ij} z_j + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} z_i$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\theta_i^{-1} [g_i^{-1}(y_i) - \lambda_i] | y_j = \rho_{ij} \theta_j^{-1} [g_j^{-1}(y_j) - \lambda_j] + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} z_i$$

따라서 y_i 의 y_j 에 대한 조건부 확률변수는 다음이 된다.

$$y_i | y_j = g_i(\lambda_i + \rho_{ij} \theta_i \theta_j^{-1} [g_j^{-1}(y_j) - \lambda_j] + \theta_i \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} z_i)$$

이 경우 다음이 성립한다.

$$y_i | VaR_j^p = g_i(\lambda_i + \rho_{ij} \theta_i \theta_j^{-1} [g_j^{-1}(VaR_j^p) - \lambda_j] z_j + \theta_i \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} z_i)$$

여기에 식 (7)에 나와 있는 VaR_j^p 를 대입하면 다음이 된다.

$$y_i | VaR_j^p = g_i(\lambda_i + \rho_{ij} \theta_i \Phi^{-1}(p) + \theta_i \sqrt{1 - \rho_{ij}^2} z_i)$$

따라서 $Co VaR_{i|j}^p$ 는 다음과 같다.

$$Co VaR_{i|j}^p \equiv VaR_i^p | VaR_j^p = g_i(\lambda_i + \theta_i [\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}] \Phi^{-1}(p)) \quad (8)$$

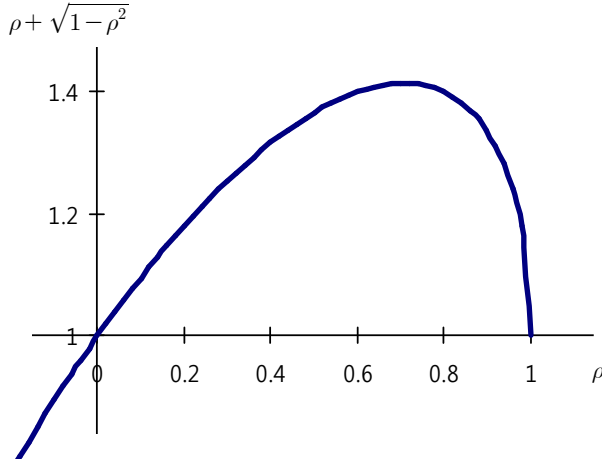
이제 여러 가지 경우에 대해 $Co VaR_{i|j}^p$ 를 구해 보자. 우선 평균이 μ 이고, 표준편차가 σ 인 이변량 정규분포모형에 대해 생각해 보자. 이는 앞의 일반식에서 $\lambda_i = \lambda_j = 0$, $\theta_i = \theta_j = 1$, $g_i(x) = \mu_i + \sigma_i x$, $g_j(x) = \mu_j + \sigma_j x$ 인 경우에 해당한다. 따라서 다음이 성립한다.

$$VaR_i^p = \mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p) \quad (9)$$

$$Co VaR_{i|j}^p = \mu_i + \sigma_i (\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}) \Phi^{-1}(p) \quad (10)$$

다음으로 이변량 S_U -정규분포모형에 대해 생각해 보자. 위치모수(location parameter) μ 와 척도모수(scale parameter) σ 를 지닌 일반적인 S_U -정규분포를 이용하기로 한다. 이는 앞의 일반식에서

[Figure 1] The Relationship between ρ and $(\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2})$



$g_i(x) = \mu_i + \sigma_i \sinh(\lambda_i + \theta_i x)$ 이고
 $g_j(x) = \mu_j + \sigma_j \sinh(\lambda_j + \theta_j x)$ 인 경우에
 해당한다. 따라서 다음이 성립한다.

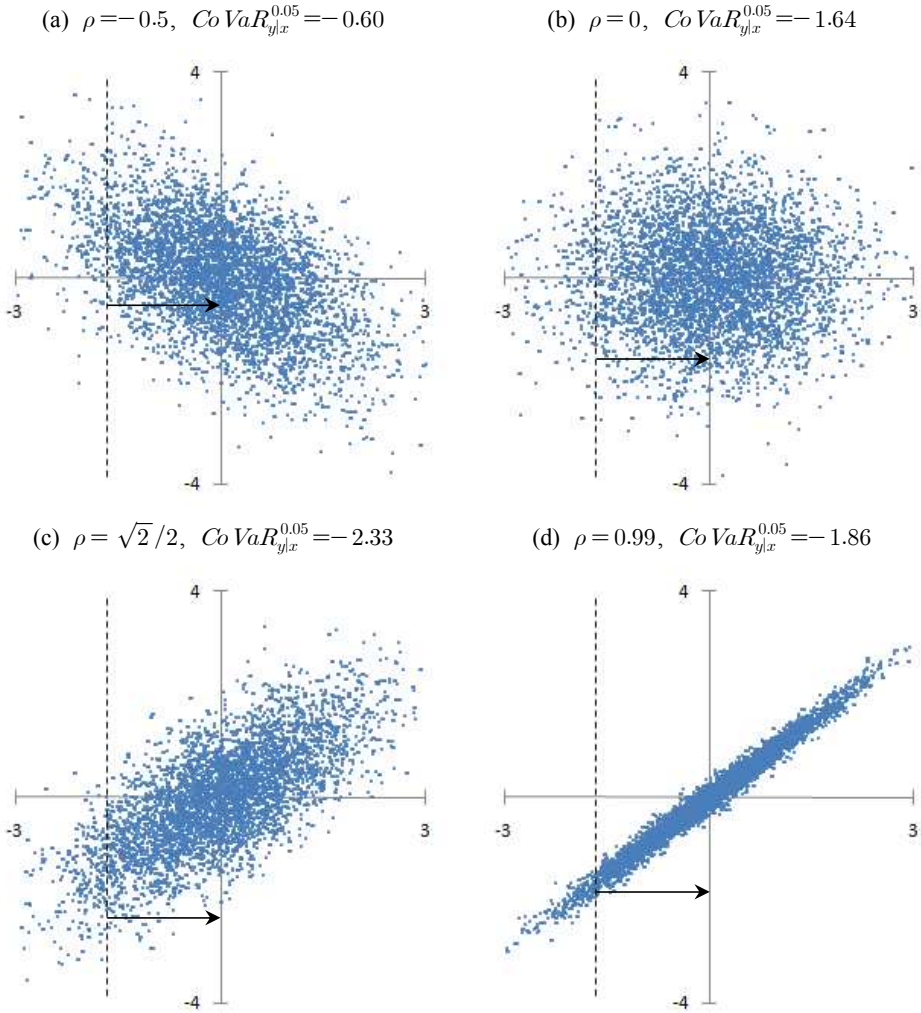
$$VaR_i^p = \mu_i + \sigma_i \sinh(\lambda_i + \theta_i \Phi^{-1}(p)) \tag{11}$$

$$CoVaR_{ij}^p = \mu_i + \sigma_i \sinh(\lambda_i + \theta_i [\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}] \Phi^{-1}(p)) \tag{12}$$

한편, 앞의 식 (9)와 (10)에 나온 정규 분포모형의 VaR와 CoVaR를 보면, 두 개의 차이가 식 (10) 우변의 괄호 안에 들어 있는 $(\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2})$ 임을 알 수 있다. 이 괄호항을 A라 할 때, 만약 $A \geq 1$ 이면, (절댓값에서) $CoVaR_{ij}^p \geq VaR_i^p$

이고, 반대로 $A < 1$ 이면, $CoVaR_{ij}^p < VaR_i^p$ 이 된다. 그런데 A는 결국 ρ 에 의해 결정되기 때문에 정규분포모형에서 $CoVaR_{ij}^p$ 와 VaR_i^p 의 상대적 크기를 결정하는 것은 ρ 이다. [Figure 1]은 ρ 와 $A = (\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2})$ 의 관계를 그래프로 그린 것이다. 몇 가지 특징적인 ρ 값을 생각해 보면, ρ 가 0이나 1의 값을 가지면 $A=1$ 이 되며, 이때 $CoVaR_{ij}^p$ 와 VaR_i^p 는 서로 동일해진다. 또한 ρ 가 0보다 크면 $A > 1$ 로서 (절댓값에서) $CoVaR_{ij}^p$ 가 VaR_i^p 보다 크게 되며, ρ 가 0보다 작으면 $A < 1$ 로서 $CoVaR_{ij}^p$ 가 VaR_i^p 보다 작아진다. A를 극대화시키는 ρ 값은 $\sqrt{2}/2$ (약 0.71)로서, 이때 만약 $\mu_i = 0$ 이라면 (절댓값에서) $CoVaR_{ij}^p$ 는 VaR_i^p 의 $\sqrt{2}$ 배(약 41.4%) 더 커지게 된다. 따라서 μ_i 가

[Figure 2] The Theoretical *CoVaR* for Various Values of ρ in a Normal Distribution Model



0일 때⁸⁾ 정규분포모형에서는 $CoVaR_{i|j}^p$ 가 VaR_i^p 보다 최대한 41.4% 더 커질 수 있게 된다.

[Figure 2]는 ρ 에 따른 $CoVaR$ 의 변화를 시각적으로 보여준다. 네 가지 ρ 값(-0.5, 0, $\sqrt{2}/2$, 0.99)을 가진 이변량 표준정규

8) 일별 주식 수익률 데이터는 평균이 0에 가깝다.

변수(x, y)에서 각각 5,000개씩의 난수를 발생시켜 산포도를 그린 것이다. $p=0.05$ 로 설정했는데, 이때 표준정규변수의 VaR는 -1.64이다. 이 상황에서 $CoVaR_{y|x}^{0.05}$ (즉, x 가 $VaR_x^{0.05} = -1.64$ 로 주어졌을 때 y 의 5% VaR)를 이론값과 함께 그림상에 그 위치를 표시해 놓았다. 그림에서 x 축을 위아래로 가로지르는 수직 점선이 $VaR_x^{0.05}$ 를 표시한 것이고, 그 선상에 있는 y 관측치 중 하위 5%에 위치하는 것(화살표로 표시)이 $CoVaR_{y|x}^{0.05}$ 에 해당한다. 그림 (a)를 통해 앞에서 설명한 대로 ρ 가 0보다 작을 때 $CoVaR$ 가 VaR 보다 작은 것을 시각적으로 이해할 수 있다. 또한 그림 (b)는 ρ 가 0일 때 $CoVaR$ 와 VaR 가 동일해지는 것을 보여주고 있으며, 그림 (c)와 (d)를 통해 ρ 가 $\sqrt{2}/2$ 에 가까워질수록 $CoVaR$ 와 VaR 의 상대적 격차가 커지다가 ρ 가 그 이상이 될 때는 격차가 다시 줄어드는 상황을 알 수 있다. 그림에는 나와 있지 않지만 $\rho=1$ 의 극단적인 상황에서는 모든 관측치가 45도 우상향선상에 있게 되고, 이때 $CoVaR$ 와 VaR 는 동일해진다.

이상에서 살펴본 ρ 에 따른 $CoVaR$ 의 변화는 정규분포모형뿐만 아니라 기본적으로 S_U -정규분포모형에도 그대로 적용된다. 왜냐하면 S_U -정규분포는 정규분포의 단조변환(monotonic transformation)에 의해 도출되었기 때문이다. 실제로 식 (11)과 (12)에 나와 있는 S_U -정규분포

모형의 VaR와 CoVaR를 비교해 보면, $\sinh(\cdot)$ 라는 단조증가함수가 있는 것 외에는 앞에서 설명한 정규분포모형과 동일한 구조이다. 따라서 이때에도 VaR와 CoVaR의 차이를 결정짓는 것은 $(\rho_{ij} + \sqrt{1 - \rho_{ij}^2})$ 의 존재 여부이며, 앞에서 설명한 논의가 그대로 적용된다.

3. 모수적 분포함수를 이용한 추정: GARCH 모형

$CoVaR$ 추정모형을 설정함에 있어서 시간에 대해 조건부(conditional)로 할 수도 있고 비조건부로 할 수도 있다. 앞에서 설명한 것이 비조건부모형으로서 시계열 데이터 각 시점에 대한 정보를 이용하지 않고 그것 모두를 사용하여 하나의 $CoVaR$ 값을 추정한다. 반면, 조건부 모형에서는 각 시점별로 그때까지의 모든 정보를 이용하여 해당 시점의 $CoVaR$ 를 추정하는 것으로서 시간가변(time-varying) $CoVaR$ 를 얻게 된다.

본 논문에서는 모수적 분포함수를 이용하여 조건부 $CoVaR$ 를 추정한다. 분석의 초점을 오차항의 서로 다른 분포함수(즉, 정규분포와 S_U -정규분포)에 맞추기 위해 모든 추정에 일률적으로 AR(1)-GARCH(1,1) 모형을 사용하기로 한다. 이는 다음과 같이 표현된다.

$$y_{i,t} = b_{0i} + b_{1i}y_{i,t-1} + \epsilon_{i,t} \quad (13)$$

$$\epsilon_{i,t} = h_{i,t}^{1/2} u_{i,t} \quad (14)$$

$$h_{i,t} = \beta_{0i} + \beta_{1i}h_{i,t-1} + \beta_{2i}\epsilon_{i,t-1}^2 \quad (15)$$

여기에서 $h_{i,t}$ 는 조건부 분산이고 $u_{i,t}$ 는 오차항으로서 상호 독립이며, 동일하다고(i.i.d.) 가정한다. 위의 모형에서 오차항의 분포함수로 정규분포와 S_U -정규분포를 적용하기로 한다. 이때 식 (14)의 $u_{i,t}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$u_{i,t} = \begin{cases} z_{i,t} & \text{정규분포} \\ \sinh(\lambda_i + \theta_i z_{i,t}) & S_U\text{-정규분포} \end{cases} \quad (16)$$

한편, 위의 GARCH 모형을 다변량으로 확장시키기 위해서는 공분산 혹은 상관 계수 행렬을 모형화해야 한다. 본 논문에서 우리는 Engle(2002)이 제안한 DCC (dynamic conditional correlation) 모형을 사용하기로 한다. 또한 분석의 초점을 오차항의 서로 다른 분포함수에 맞추기 위해 모든 추정에서 DCC(1,1) 모형을 일률적으로 채택했다. DCC(1,1) 모형은 다음과 같이 표현된다.

$$Q_t = (1 - \delta_1 - \delta_2)\bar{Q} + \delta_1(z_{t-1}z'_{t-1}) + \delta_2 Q_{t-1} \quad (17)$$

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1} \quad (18)$$

여기에서 \bar{Q} 는 z_t 의 비조건부 공분산 행렬이고, Q_t^* 는 Q_t 의 대각(diagonal) 원소로 이루어진 대각행렬이다. Engle(2002)에 따르면, Q_t 가 양의 정부호가 되기 위해서는 δ_1 과 δ_2 가 비음수이고, 두 모수의 합이 1보다 작아야 한다. Q_t 가 양의 정부호이면 R_t 역시 양의 정부호이며, 그 역도 성립한다.

이상의 DCC(1,1)-AR(1)-GARCH(1,1) 모형에서 오차항의 분포함수가 정규분포일 경우는 $y_{i,t} = b_{0i} + b_{1i}y_{i,t-1} + h_{i,t}^{1/2} z_{i,t}$ 를 의미하기 때문에 식 (8)을 적용하면 $CoVaR_{ij,t}^p$ 는 다음이 된다.

$$CoVaR_{ij,t}^p = b_{0i} + b_{1i}y_{i,t-1} + h_{i,t}^{1/2}(\rho_{ij,t} + \sqrt{1 - \rho_{ij,t}^2})\Phi^{-1}(p) \quad (19)$$

여기에서 ρ_{ij} 는 식 (5)와 (6)에 들어 있는 R 행렬의 원소이다. 한편, 오차항이 S_U -정규분포일 경우 $y_{i,t} = b_{0i} + b_{1i}y_{i,t-1} + h_{i,t}^{1/2}[\sinh(\lambda_i + \theta_i z_{i,t})]$ 이기 때문에 $CoVaR_{ij,t}^p$ 는 다음이 된다.

$$CoVaR_{ij,t}^p = b_{0i} + b_{1i}y_{i,t-1} + h_{i,t}^{1/2}(\sinh[\lambda_i + \theta_i(\rho_{ij,t} + \sqrt{1 - \rho_{ij,t}^2})]\Phi^{-1}(p)) \quad (20)$$

제III장에서 행하는 모든 추정은 통계

패키지 GAUSS를 이용했으며, 이 중 분위 수 회귀 추정은 Qreg-library⁹⁾를 이용하고, 모수적 분포함수모형의 최우추정(maximum likelihood estimation)을 실행할 때 최적화과정은 CML-library를 이용했다.

III. 추정 결과

데이터는 2006년 1월부터 2009년 9월 까지의 일별 주식 로그수익률이다. 국내 은행 중 주식이 거래되고 있는 총 9개 은행 및 은행지주회사를 대상으로 한다. 구체적으로는 기업은행(IBK), 대구은행(Daegu), 부산은행(Busan), 신한지주(Shinhan), 외환은행(KEB), 우리금융지주(Woori), 전북은행(Jeonbuk), 제주은행(Cheju), 하나금융지주(Hana)이다. 신한, 우리, 하나 등은 은행 주가가 없기 때문에 그 대응변수로 금융지주회사 주가를 사용했다. 본 연구에서 초점을 맞추고 있는 시스템 위기의 경우, 그것이 발생했을 때 과거 경험상 동일 그룹에 속한 모든 금융회사들이 비슷한 수준의 타격을 받는다는 점에서, 그리고 이들 3개 금융지주회사는 사실상 ‘은행’지주회사라는 점에서 은행 주가의 대응변수로 해당 금융지주회사 주가를 사용하는 것이 타당성

을 지닌다고 하겠다.

9개 은행의 주식과 KOSPI의 수익률에 대한 요약 통계량이 <Table 1>에 나와 있다. 표준편차를 보면 KOSPI의 경우 1.76인 데 반해, 9개 은행의 표준편차는 모두 이보다 훨씬 큰 것을 알 수 있다. 이는 일반적으로 개별 주가보다 그것들로 이루어진 포트폴리오의 변동성이 더 낮은 것을 반영하고 있다. 수익률 분포의 비대칭 정도를 나타내는 왜도(skewness)에 있어서는 우리금융과 전북은행을 제외하고는 모두 왼쪽 꼬리가 긴 음(-)의 왜도를 보이고 있다. 분포함수 중앙 부분의 뾰족한 정도, 혹은 꼬리 부분의 두터운 정도를 나타내는 첨도에서는 모두 정규분포의 첨도계수인 3보다 큰 초과첨도를 나타내고 있다. 마지막 열에 나와 있는 상관계수는 KOSPI 수익률과 각 은행 주식수익률의 상관계수를 계산한 것이다. 모두 양(+)의 상관계수를 나타내고 있으며, 최저 0.45(제주은행)에서 최고 0.70(기업은행) 사이인 것으로 나타났다.

<Table 2>~<Table 4>는 각각 분위수 회귀, 정규분포모형, S_U -정규분포모형에 의한 비조건부 CoVaR의 추정 결과를 보여주고 있다. 각 표에서 은행 이름을 제외한 왼쪽 3개 열은 $p=0.05$ 인 경우이고, 오른쪽 3개 열은 $p=0.01$ 인 경우이다. 각각의 p 에 대해 CoVaR, $\Delta CoVaR$,

9) Jacomy, Messines, and Roncalli가 작성한 프로그램을 <http://www.thierry-roncalli.com/>에서 다운로드받아 사용했다.

〈Table 1〉 Summary Statistics for Stock Log-Returns

	Mean (×100)	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Corr. Coef. with KOSPI
KOSPI	2.00	1.76	-0.53	9.31	1.00
IBK	-1.97	3.07	-0.42	8.42	0.70
Daegu	1.25	2.96	-0.18	6.98	0.63
Busan	0.00	2.90	-0.42	6.55	0.61
Shinhan	1.24	2.79	-0.20	7.65	0.69
KEB	-0.12	2.85	-0.09	8.36	0.56
Woori	-2.54	3.53	0.03	8.33	0.67
Jeonbuk	-2.93	2.46	0.43	7.77	0.53
Cheju	-1.10	2.16	-0.47	14.24	0.45
Hana	-1.47	3.47	-0.29	8.54	0.60

(Unit: %)

VaR 를 계산하였다. 여기에서 $CoVaR$ 는 $CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 로서 은행 j 의 주식수익률이 VaR_j^p 일 때, KOSPI 수익률의 VaR 를 의미한다. 그 다음 열에 있는 $\Delta CoVaR$ 는 $CoVaR_{KOSPI|j}^p - VaR_{KOSPI}^p$ 를 계산한 것으로서 은행 j 의 시스템리스크 기여도를 의미한다. 마지막으로 VaR 는 VaR_j^p 로서 은행 j 의 VaR 를 의미한다.

우선 <Table 2>에 나와 있는 분위수 회귀 추정 결과를 보면, 모든 은행의 $\Delta CoVaR$ 가 음수인 것을 알 수 있다. 이는 $CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 가 VaR_{KOSPI}^p 에 비해 절댓값이 더 큰 것을 의미한다. 즉, 어떤 개별 은행이 위기에 처한 상태를 전제로 평가한 시스템리스크가 그런 전

제 없이 평가한 비조건부 시스템리스크에 비해 더 크다는 것을 의미한다. 모든 은행들이 시스템리스크에 양(+)의 기여를 하고 있다는 의미이다. 이와 같은 양의 효과는 $p=0.05$ 와 $p=0.01$ 에서 동일한 것으로 나타났다. 한편 <Table 2>에는 나와 있지 않지만 각 은행들의 시스템리스크 기여도를 비율로 계산해 보았다. 즉, 다음의 비율을 계산하였다.

시스템리스크 기여율(%) =

$$\frac{CoVaR_{KOSPI|j}^p - VaR_{KOSPI}^p}{VaR_{KOSPI}^p} \quad (21)$$

이를 계산한 결과, <Table 2>에 제시되어 있는 분위수 회귀 추정의 경우

<Table 2> CoVaR Estimated by Quantile Regression

	p=0.05			p=0.01		
	CoVaR	ΔCoVaR	VaR	CoVaR	ΔCoVaR	VaR
IBK	-3.82	-0.94	-4.46	-8.08	-2.80	-8.65
Daegu	-4.03	-1.15	-4.45	-6.61	-1.33	-6.83
Busan	-4.06	-1.18	-4.48	-7.86	-2.58	-7.71
Shinhan	-3.76	-0.89	-3.97	-8.20	-2.92	-8.61
KEB	-3.75	-0.88	-3.98	-7.15	-1.87	-7.41
Woori	-3.89	-1.02	-5.14	-7.20	-1.92	-11.72
Jeonbuk	-3.68	-0.81	-3.57	-7.08	-1.80	-5.57
Cheju	-3.97	-1.10	-3.18	-7.19	-1.91	-5.97
Hana	-3.88	-1.01	-4.74	-8.00	-2.72	-14.20

Note: Co VaR, ΔCo VaR, and VaR denotes $Co VaR_{KOSPI,j}^p$, $Co VaR_{KOSPI,j}^p - VaR_{KOSPI}^p$, and VaR_j^p , respectively.

p=0.05일 때에는 기여율이 28~41%(9개 은행 평균 35%)이고, p=0.01일 때에는 기여율이 25~55%(9개 은행 평균 42%)인 것으로 나타났다. 보다 극단적인 위기(즉, p=0.01)를 가정했을 때 은행들의 시스템리스크 기여율이 평균적으로 더 커진다는 것을 의미한다.

다음으로 <Table 3>에 나와 있는 정규 분포모형에 의한 추정 결과를 보면, 기본적으로 모든 은행의 ΔCoVaR가 음수로서 시스템리스크에 양(+)의 기여를 하고 있다는 점에서는 앞의 분위수 회귀 추정 결과와 동일하다. 정규분포모형에 의해 추정된 CoVaR를 분위수 회귀 추정 결과와 비교해 보면, p=0.05인 경우에는 총 9개

은행 중 2개(부산, 제주)를 제외하고는 모두 정규분포모형으로 추정한 CoVaR가 (절댓값에서) 더 큰 것으로 나타났다. 이와 반대로 p=0.01인 경우에는 9개 은행 모두에 있어서 분위수 회귀로 추정한 CoVaR가 더 큰 것으로 나타났다. 따라서 정규분포모형에 의해 추정할 경우 p=0.01에서 분위수 회귀방식에 비해 CoVaR를 (절댓값에서) 과소평가한다고 할 수 있다. 한편, p가 0.05일 때에 비해 0.01일 때 두 추정방식에 의해 추정된 CoVaR 간에 더 큰 차이가 있는 것도 알 수 있다.

또 한 가지 분위수 회귀 추정 결과와 대비되는 부분은 정규분포모형의 경우 CoVaR 추정치가 은행 간에 별로 차이가

〈Table 3〉 *CoVaR* Estimated by Normal Distribution Model

	$p=0.05$			$p=0.01$		
	<i>CoVaR</i>	$\Delta CoVaR$	<i>VaR</i>	<i>CoVaR</i>	$\Delta CoVaR$	<i>VaR</i>
IBK	-4.08	-1.20	-5.07	-5.77	-1.70	-7.16
Daegu	-4.05	-1.17	-4.85	-5.74	-1.66	-6.87
Busan	-4.05	-1.17	-4.76	-5.73	-1.65	-6.74
Shinhan	-4.07	-1.20	-4.58	-5.77	-1.69	-6.48
KEB	-4.01	-1.13	-4.69	-5.67	-1.60	-6.63
Woori	-4.07	-1.19	-5.84	-5.76	-1.69	-8.24
Jeonbuk	-3.97	-1.09	-4.07	-5.62	-1.54	-5.75
Cheju	-3.87	-0.99	-3.57	-5.48	-1.40	-5.04
Hana	-4.04	-1.16	-5.72	-5.72	-1.64	-8.09

Note: *CoVaR*, $\Delta CoVaR$, and *VaR* denotes $CoVaR_{KOSPIj}^p$, $CoVaR_{KOSPIj}^p - VaR_{KOSPI}^p$, and VaR_j^p , respectively.

없다는 점이다. $p=0.01$ 일 때를 보면, 분위수 회귀의 경우 *CoVaR*의 최솟값과 최댓값의 차이가 1.6%p 정도인 데 반해, 정규분포모형의 경우, 그 차이가 0.3%p 수준에 그치고 있다. 한편, <Table 2>에서와 마찬가지로 <Table 3>에 대해서도 식 (21)에 의해 각 은행들의 시스템리스크 기여도(%)를 계산하였다. 정규분포모형의 경우, $p=0.05$ 일 때와 $p=0.01$ 일 때의 기여도가 동일하며, 34~42%(9개 은행 평균 40%)인 것으로 나타났다.

다음으로 <Table 4>에 나와 있는 S_U -정규분포모형에 의한 추정 결과를 보면, 앞의 두 추정 결과와 마찬가지로 모든 은행의 $\Delta CoVaR$ 가 음수로서 시스템리스크에

양(+)의 기여를 하고 있는 것으로 나타났다. 그러나 *CoVaR*의 크기에 있어서는 앞의 두 추정 결과와 상당히 큰 차이를 보이는데, $p=0.05$ 와 $p=0.01$ 의 경우 S_U -정규분포모형에 의해 추정한 *CoVaR*가 분위수회귀 및 정규분포모형 추정치보다 (절댓값에서) 훨씬 크며, 그 정도는 $p=0.01$ 인 경우에 더 심한 것으로 나타났다. 즉, $p=0.05$ 인 경우 S_U -정규분포모형에 의해 추정한 *CoVaR*가 분위수 회귀나 정규분포모형에 비해 (절댓값에서) 1.2~1.5배 정도 더 크며, $p=0.01$ 인 경우에는 그 차이가 더 심해지며, 특히 정규분포모형에 비해서는 최고 2.5배나 더 큰 것으로 나타났다.

이와 같은 큰 차이가 $CoVaR_{KOSPIj}^p$,

<Table 4> CoVaR Estimated by S_U -normal Distribution Model

	p=0.05			p=0.01		
	CoVaR	$\Delta CoVaR$	VaR	CoVaR	$\Delta CoVaR$	VaR
IBK	-5.71	-2.86	-4.55	-14.19	-8.45	-8.57
Daegu	-5.67	-2.81	-4.56	-14.04	-8.30	-7.72
Busan	-5.66	-2.80	-4.56	-14.00	-8.26	-7.91
Shinhan	-5.74	-2.88	-4.11	-14.26	-8.52	-7.61
KEB	-5.54	-2.68	-4.19	-13.60	-7.86	-7.32
Woori	-5.70	-2.85	-5.19	-14.15	-8.41	-10.85
Jeonbuk	-5.42	-2.57	-3.64	-13.23	-7.49	-6.67
Cheju	-4.85	-1.99	-2.99	-11.41	-5.67	-6.86
Hana	-5.60	-2.75	-5.01	-13.83	-8.09	-9.64

Note: Co VaR, $\Delta Co VaR$, and VaR denotes $Co VaR_{KOSPI_j}^p$, $Co VaR_{KOSPI_j}^p - VaR_{KOSPI}^p$, and VaR_j^p , respectively.

즉 $VaR_{KOSPI}^p | VaR_j^p$ 의 ‘조건’ 부분에 해당하는 VaR_j^p 추정치의 차이에서 비롯되었는지를 살펴볼 필요가 있다. <Table 2>~<Table 4>에 나와 있는 VaR 항목이 이를 보여주고 있다. 이 값들을 추정방법 간에 비교해 보면 차이가 나기는 하지만 CoVaR의 차이에 비해서는 훨씬 정도가 덜한 것을 알 수 있다.¹⁰⁾ 또한 CoVaR의 경우에는 S_U -정규분포모형에 의

한 추정치가 다른 추정 결과에 비해 (절댓값에서) 훨씬 큰 데 반해, VaR_j^p 의 경우에는 반드시 그렇지만은 않다는 것이다. 이러한 사실을 고려할 때 CoVaR 추정치의 차이는 CoVaR의 조건 부분에 해당하는 VaR_j^p 때문이 아니라 그것을 제외한 나머지 부분에서 비롯된 것이라고 할 수 있다.

이처럼 S_U -정규분포모형의 CoVaR 추

10) VaR_j^p 의 (절댓값) 크기를 추정방법별로 비교해 보면, p=0.05에서는 경험적 분포(empirical distribution)에 의거하여 추정한 분위수 회귀 추정치가 가장 작고, S_U -정규분포모형 추정치는 분위수 회귀에 비해 그 값이 전반적으로 약간 더 크지만 차이는 크지 않은 반면, 정규분포모형 추정치는 비교적 뚜렷하게 분위수 회귀 및 S_U -정규분포모형 추정치보다 큰 것을 알 수 있다. 그럼에도 불구하고 p=0.05에서는 세 가지 추정치에 큰 차이가 없는 반면, p=0.01인 경우에는 추정방법에 따라 결과에 비교적 큰 차이가 발생하는 것을 알 수 있다. 특히 정규분포모형 추정치가 p=0.05의 경우와는 정반대로 가장 작은 것으로 나타났다. VaR 추정에 있어서 정규분포모형의 이러한 특징(특히, 1% VaR 추정에서의 과소평가 경향)은 선행 연구에서 자주 보고되고 있다.

정치가 앞의 두 모형과 크게 다름에 따라 $\Delta CoVaR$ 추정치 역시 앞의 결과와 차이가 큰 것을 알 수 있다. 식 (21)에 의해 각 은행들의 시스템리스크 기여도(%)를 계산한 결과, S_U -정규분포모형의 경우 $p=0.05$ 일 때에는 기여도가 70~101%(9개 은행 평균 94%)이고, $p=0.01$ 일 때에는 기여도가 99~148%(9개 은행 평균 137%)인 것으로 나타났다. 분위수회귀 및 정규분포모형의 결과에 비해 은행들의 시스템리스크 기여도가 훨씬 크게 나타난 것을 알 수 있다.

Adrian and Brunnermeier(2009)가 지적했듯이 $CoVaR$ 의 개념적 유용성에도 불구하고, 만약 추정된 $CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 혹은 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 가 VaR_j^p 와 체계적인 관련을 맺고 있다면 그 유용성이 반감될 수밖에 없다. 예를 들어, VaR_j^p 를 기준으로 한 은행별 위험도의 순위와 $CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 혹은 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 를 기준으로 한 은행별 위험도의 순위 간에 차이가 거의 없다면 시스템리스크의 측정수단으로서 $CoVaR$ 의 유용성이 반감된다. 왜냐하면 개별 은행의 위험도를 나타내는 VaR_j^p 만으로도 해당 은행의 시스템리스크 기여도를 어느 정도 파악할 수 있기 때문이다. 이러한 맥락에서 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 와 VaR_j^p 의 체계적 관련성을 시각적으로 확인해 보기 위해 <Table 4>에 나와 있는 결과를 그림으로 그린 것이 [Figure 3]이다. 즉, 세 가지 추

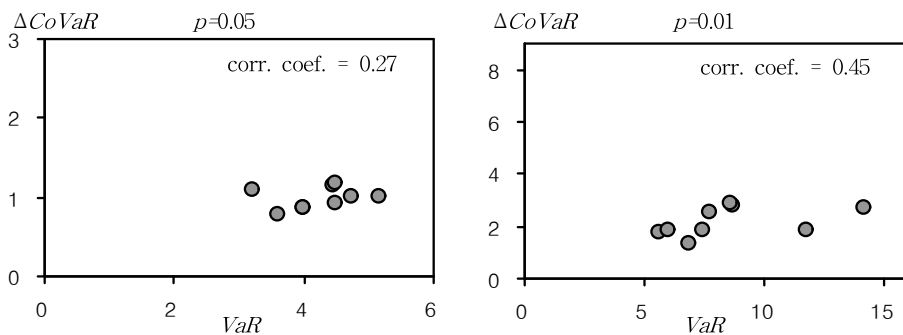
정방법별로 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 과 VaR_j^p 의 추정 결과를 (절댓값을 기준으로) 산포도로 나타내었다. 또한 추정치 개수가 많지는 않지만 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 와 VaR_j^p 추정치 간의 상관계수도 계산하였다.

[Figure 3]을 보면 전체적으로 (절댓값에서) VaR_j^p 가 클수록 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 도 큰 경향이 있는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 분위수 회귀에 비해 정규분포 및 S_U -정규분포모형 추정 결과에서 좀 더 뚜렷한 것으로 나타났다. 상관계수를 보더라도 모두 양수로서 분위수 회귀 추정에서는 p 가 5%와 1%일 때 각각 0.27, 0.45인 반면, 정규분포모형에서는 두 경우 모두 상관계수가 0.77이고, S_U -정규분포모형에서는 각각 0.82, 0.49인 것으로 나타났다.

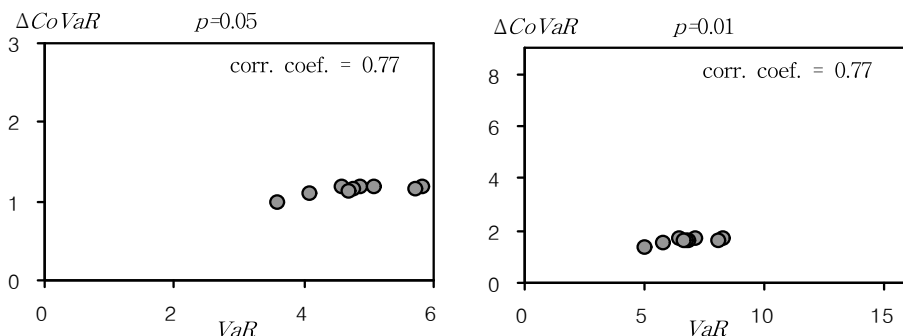
[Figure 3]의 결과로 볼 때, $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 와 VaR_j^p 간에 어느 정도 연관성이 있기는 하지만, 그것이 $CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 혹은 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 의 유용성을 훼손할 정도는 아닌 것으로 판단된다. 왜냐하면 어느 정도의 상관성에도 불구하고 VaR_j^p 로는 충분하지 않은 $CoVaR_{KOSPI|j}^p$ 만이 제시하는 정보가 있기 때문이다. 예를 들어, [Figure 3]에 나온 6개 경우 중 상관계수가 가장 높은 것으로 나타난 S_U -정규분포모형의 $p=0.05$ 인 경우를 살펴보자. 여기에서 예를 들어 신한은행의 경우에는 <Table 4>에서

[Figure 3] Relationship between VaR and CoVaR

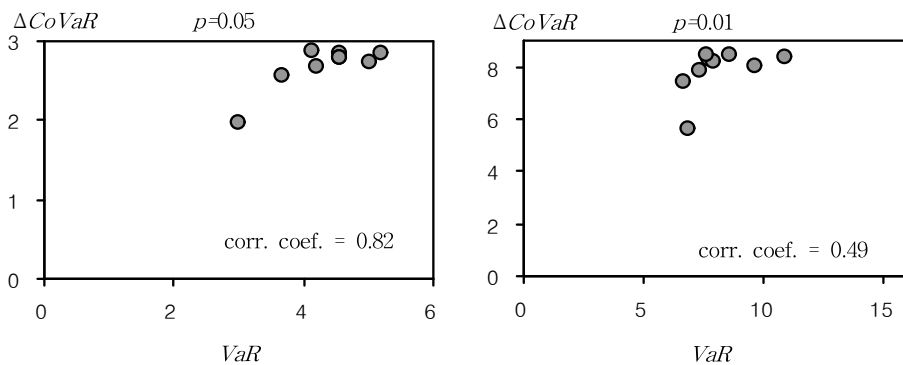
(1) Quantile Regression



(2) Normal Model



(3) S_U -normal Model



Note: VaR and $\Delta CoVaR$ denotes VaR_j^p and $CoVaR_{KOSPI_j}^p - VaR_{KOSPI}^p$, respectively.

〈Table 5〉 The Ranking of $\Delta CoVaR$ (in absolute value)

	$p=0.05$			$p=0.01$		
	Quantile	Normal	S_U	Quantile	Normal	S_U
IBK	6	1	2	2	1	2
Daegu	2	4	4	9	4	4
Busan	1	5	5	4	5	5
Shinhan	7	2	1	1	2	1
KEB	8	7	7	7	7	7
Woori	4	3	3	5	3	3
Jeonbuk	9	8	8	8	8	8
Cheju	3	9	9	6	9	9
Hana	5	6	6	3	6	6

알 수 있듯이 개별 리스크를 측정하는 VaR_j^p 에서는 9개 은행 중 (절대값에서) 7위인 반면, 시스템리스크를 측정하는 $CoVaR_{KOSPI_j}^p$ 에서는 9개 은행 중 1위인 것을 알 수 있다. 바로 이러한 부분을 포착하기 위한 것이 $CoVaR$ 혹은 $\Delta CoVaR$ 의 개념이라는 점에서 그 유용성을 확인할 수 있다.¹¹⁾

〈Table 5〉에서는 $\Delta CoVaR_{KOSPI_j}^p$ 의 (절대값) 크기에 따라 은행의 시스템리스크 기여도를 순위로 표시하였다. 우선 분위수 회귀 결과를 보면, $p=0.05$ 에서는 부산은행의 시스템리스크 기여도가 가장 크고, 전북은행의 기여도가 가장 낮은 것

으로 나타났다. 그러나 $p=0.01$ 일 때에는 이 순위가 바뀌어 신한은행의 시스템리스크 기여도가 가장 크고, 대구은행이 가장 낮은 것으로 나타났다. 이처럼 분위수 회귀에서는 p 의 수준에 따라 은행의 순위가 크게 바뀌는 데 반해, 정규분포와 S_U -정규분포모형에서는 순위가 p 에 따라 바뀌지 않는 것을 알 수 있다. 이것이 $CoVaR$ 추정에 있어서 분위수 회귀방식과 모수적 분포함수를 이용한 방식의 가장 큰 차이 중의 하나라 할 수 있다. 양자 중 어느 방식이 더 좋은지는 결국 실증적으로 판단될 수밖에 없겠지만, 그 용도를, 예를 들어 금융감독당국의 ‘시스템리

11) 물론 이와 같은 은행의 시스템리스크 기여도는 상대적인 것이다. 따라서 이를 기준으로, 예컨대 은행세나 예금보험료를 부과하는 경우라면 부채(혹은 예금)나 자본금 규모를 감안하여 절대액을 결정하게 될 것이다.

스크 평가 척도'로 국한시켜 본다면 p 에 따라 순위가 크게 바뀌는 분위수 회귀방식보다는 p 가 CoVaR의 크기에는 영향을 미치지 않지만 은행별 순위에는 영향을 미치지 않는 모수적 분포함수모형이 더 바람직하다고 할 수 있을 것이다. 분위수 회귀의 경우 $p=0.05$ 에서 시스템리스크 기여도 순위가 1위와 2위인 부산은행과 대구은행이 $p=0.01$ 에서는 순위가 각각 4위와 9위로 바뀔 정도로 차이가 크다. 하지만 p 를 어떤 수준으로 하는 것이 바람직한가에 대해서는 판단을 내리기가 매우 어렵다는 한계가 있다.

한편, <Table 5>에 있는 결과를 모형 간에 비교해 보면, 분위수 회귀모형과 모수적 분포함수모형 간에는 은행별 순위에 상당한 차이가 있는 것을 알 수 있다. 반면, 모수적 분포함수모형 내에서 정규분포모형과 S_U -정규분포모형 간에는 은행별 순위에 차이가 매우 적다는 것을 알 수 있다. 9개 은행 중 기업은행과 신한은행의 순위만 다른데, 정규분포모형에서는 기업은행 1위, 신한은행 2위인 반면, S_U -정규분포모형에서는 그것이 뒤바뀌어 신한은행 1위, 기업은행 2위이다. 앞의 <Table 3>과 <Table 4>에서 본 것처럼 CoVaR 혹은 $\Delta CoVaR$ 의 추정치가 정규분포모형과 S_U -정규분포모형 간에 크게 다르지만, 은행별 '순위'에 있어서는 두 모

형 간에 차이가 매우 적은 것을 발견할 수 있다.

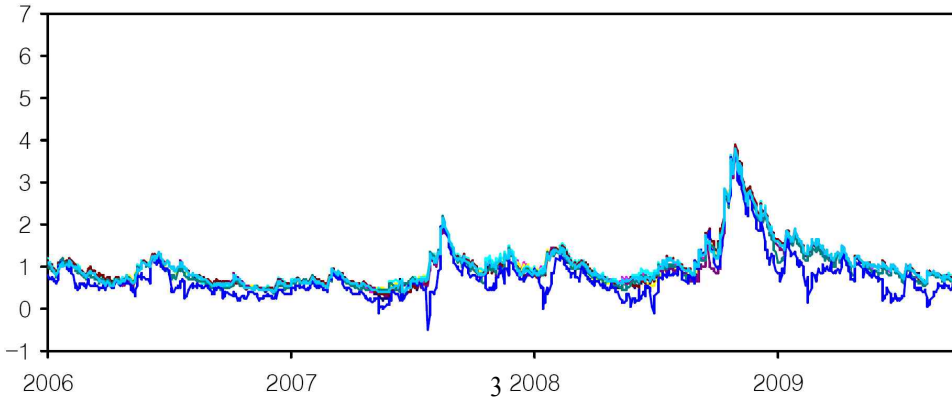
지금까지는 2006년 1월부터 2009년 9월까지 총 931개의 관측치를 이용하여 단 하나의 CoVaR를 추정하였는데, 이번에는 GARCH 모형을 이용하여 시간가변(time-varying) CoVaR를 추정한다. 추정에서는 앞 장에서 설명한 대로 이변량 GARCH 모형에서 상관관계수 행렬의 변화를 DCC 모형으로 규정하고, 오차항으로는 정규분포와 S_U -정규분포 두 가지를 고려한다. p 는 5% 한 가지에 대해서만 추정한다.¹²⁾ [Figure 4]는 $\Delta CoVaR_{KOSPI,j,t}^{0.05}$, 즉 $CoVaR_{KOSPI,j,t}^{0.05} - VaR_{KOSPI,t}^{0.05}$ 추정치(절댓값)를 그림으로 나타낸 것이다.

그림에서 보듯이 총 9개 은행에 대해 $\Delta CoVaR$ 추정치를 그린 것이지만, 특히 정규분포모형의 경우에는 추정치의 차이가 은행 간에 크지 않은데다 변화 추이도 매우 유사하여 서로 구별이 쉽지 않다. 9개 은행 추정치 중 전체 경향에서 가장 벗어난 것은 제주은행으로서 두 그림 모두에서 가장 아래쪽에 위치한 시리즈이다. 전체적으로 보면, 두 모형 모두 2008년 9월경부터 $\Delta CoVaR$ 절댓값이 가파른 상승세를 보이기 시작하여 같은 해 10월 말 시점에 최고치를 기록한 것으로 나타났다. 당시 미국발 금융위기가 본격적으로 전개되는 시기에 각 은행들의 시스템

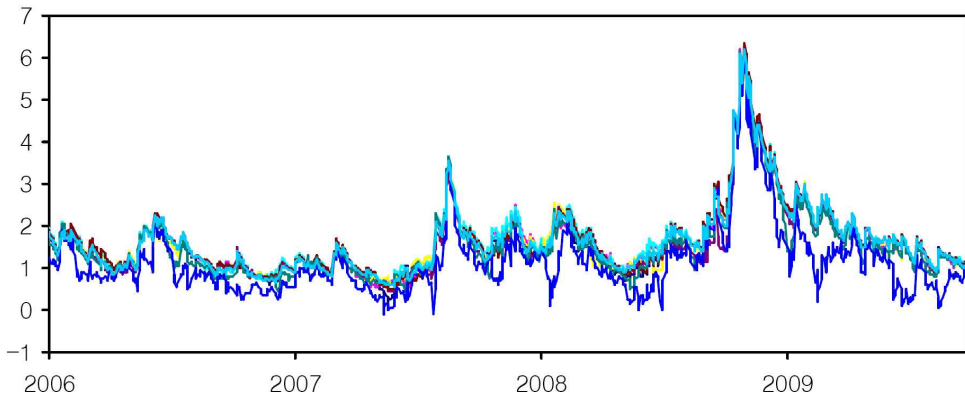
12) $p=1\%$ 인 경우에도 전체적인 경향은 크게 다르지 않았다.

[Figure 4] Daily $\Delta CoVaR$ Estimated by DCC-GARCH Model ($p=0.05$)

(1) Normal Model



(2) S_U -normal Model



Note: Each graph shows absolute value of $\Delta CoVaR_{KOSPI,j,t}^{0.05} = CoVaR_{KOSPI,j,t}^{0.05} - VaR_{KOSPI,t}^{0.05}$ for 9 banks

리스크 기여도가 가장 커진 것이다. 정규 분포모형과 S_U -정규분포모형을 비교해 보면 앞의 <Table 3>과 <Table 4>의 비조건부 $CoVaR$ 와 마찬가지로 S_U -정규분포모형으로 추정된 $CoVaR$ 가 절대 크기에 있어서 훨씬 큰 것으로 나타났다. 또한 기여도를 비율로 계산했을 때에도 S_U -정규

분포모형의 추정치가 훨씬 큰 것을 확인할 수 있었다.

한편, 조건부 $CoVaR$ 의 추정 결과가 앞의 비조건부 결과와 한 가지 다른 점은 $CoVaR$ 가 항상 VaR 보다 (절댓값에서) 더 크게 나타난 것은 아니라는 점이다. 9개 은행 중 유일하게 제주은행의 경우에는

<Table 6> The Correlation Coefficients among Daily $\Delta CoVaR$ ($p=0.05$)

(1) Normal Model

	IBK	Daegu	Busan	Shinhan	KEB	Woori	Jeonbuk	Cheju	Hana
IBK	1	0.993	0.992	0.992	0.980	0.996	0.986	0.922	0.994
Daegu	0.993	1	0.995	0.995	0.984	0.993	0.990	0.923	0.996
Busan	0.992	0.995	1	0.992	0.985	0.991	0.989	0.921	0.994
Shinhan	0.992	0.995	0.992	1	0.980	0.992	0.990	0.921	0.995
KEB	0.980	0.984	0.985	0.980	1	0.982	0.977	0.908	0.989
Woori	0.996	0.993	0.991	0.992	0.982	1	0.987	0.928	0.995
Jeonbuk	0.986	0.990	0.989	0.990	0.977	0.987	1	0.928	0.989
Cheju	0.922	0.923	0.921	0.921	0.908	0.928	0.928	1	0.920
Hana	0.994	0.996	0.994	0.995	0.989	0.995	0.989	0.920	1

(2) S_U -normal Model

	IBK	Daegu	Busan	Shinhan	KEB	Woori	Jeonbuk	Cheju	Hana
IBK	1	0.990	0.990	0.992	0.980	0.995	0.981	0.920	0.994
Daegu	0.990	1	0.991	0.994	0.981	0.990	0.984	0.919	0.994
Busan	0.990	0.991	1	0.990	0.975	0.986	0.983	0.916	0.991
Shinhan	0.992	0.994	0.990	1	0.979	0.992	0.985	0.918	0.996
KEB	0.980	0.981	0.975	0.979	1	0.982	0.974	0.907	0.987
Woori	0.995	0.990	0.986	0.992	0.982	1	0.982	0.927	0.994
Jeonbuk	0.981	0.984	0.983	0.985	0.974	0.982	1	0.928	0.986
Cheju	0.920	0.919	0.916	0.918	0.907	0.927	0.928	1	0.919
Hana	0.994	0.994	0.991	0.996	0.987	0.994	0.986	0.919	1

총 929 거래일 중 8차례에 걸쳐 *CoVaR*가 *VaR*를 소폭 하회하는 현상이 나타났다 (정규분포모형). [Figure 4]에서 맨 아래쪽에 위치한 제주은행의 $\Delta CoVaR$ 추이를 보면 이를 알 수 있다.

[Figure 4]에서 보듯이 각 은행들의

$\Delta CoVaR$ 는 시간에 따라 비슷한 변화 추이를 보이고 있다. 은행별 $\Delta CoVaR$ 시리지가 과연 얼마나 유사한 변화패턴을 보이는지 측정하기 위한 방법으로 각 시리즈 간 상관계수를 구한 결과가 <Table 6>에 나와 있다. 상관계수가 가장 낮은

〈Table 7〉 The Correlation Coefficients between $\Delta CoVaR_{KOSPI}^{0.05}$ and $VaR_{j,t}^{0.05}$

	Normal Model	S_U -normal Model
IBK	0.865	0.850
Daegu	0.843	0.837
Busan	0.857	0.844
Shinhan	0.847	0.811
KEB	0.788	0.762
Woori	0.834	0.819
Jeonbuk	0.467	0.535
Cheju	0.620	0.650
Hana	0.847	0.822

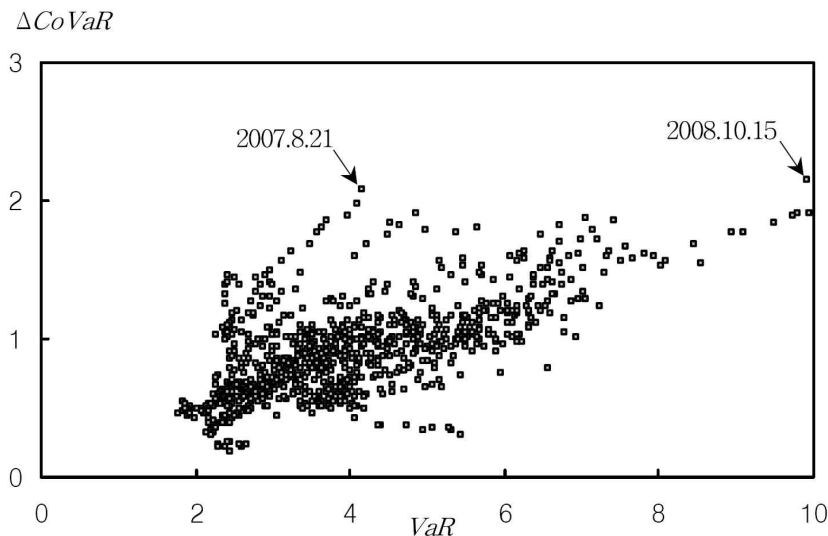
은행을 찾아보면, 두 모형에서 똑같이 외환-제주은행(정규분포모형 0.908, S_U -정규분포 모형 0.907)인 것으로 나타났다. 이처럼 두 모형 모두에 있어서 가장 낮은 상관계수가 0.9 이상일 정도로 은행별 $\Delta CoVaR$ 가 서로 높은 상관성을 보이는 것을 알 수 있다. 이는 은행별 $\Delta CoVaR$ 가 시간에 따라 변화하기는 하지만 이들 사이의 서열이나 간격은 상당히 안정되어 있다는 것을 의미한다. 다시 말하면, 개별 은행의 시스템리스크 기여 정도가 시간에 따라 변화하지만 은행 간 상대적 기여도에 있어서는 비교적 안정되어 있다는 것을 의미한다. 이는 [Figure 4]에서도 어느 정도 짐작할 수 있는 부분이다.

시간가변 $CoVaR$ 와 관련하여 다음으로 살펴본 부분은 각 은행의 시스템리스크 기여도가 해당 은행의 독립적인 개별 리

스크와 얼마나 관련성을 맺고 있는냐는 것이다. 즉, 앞의 [Figure 3]에서 살펴본 것과 같은 맥락에서 $\Delta CoVaR_{KOSPI}^{0.05}$ 와 $VaR_{j,t}^{0.05}$ 의 상관성을 점검하였다. 앞에서도 언급하였듯이 만약 이들 두 척도가 매우 높은 상관성을 보인다면, VaR 만으로도 시스템리스크와 관련된 정보를 얻을 수 있기 때문에 $CoVaR$ 의 유용성이 떨어질 수밖에 없다. <Table 7>의 결과에서 보듯이 $\Delta CoVaR$ 와 VaR 의 상관계수가 정규분포모형의 경우에는 0.46~0.86이고 S_U -정규분포모형은 0.53~0.85로 나타났다. 상관계수의 크기에 대한 해석은 다양할 수 있지만, $CoVaR$ 의 유용성을 훼손할 만큼은 아닌 것으로 판단된다.

이 문제를 좀 더 생각해 보기 위해 기업은행을 예로 들어 $\Delta CoVaR$ 와 VaR 를 (절댓값 기준으로) 산포도로 그린 것이

[Figure 5] The Relationship between Daily VaR and $\Delta CoVaR$ for IBK



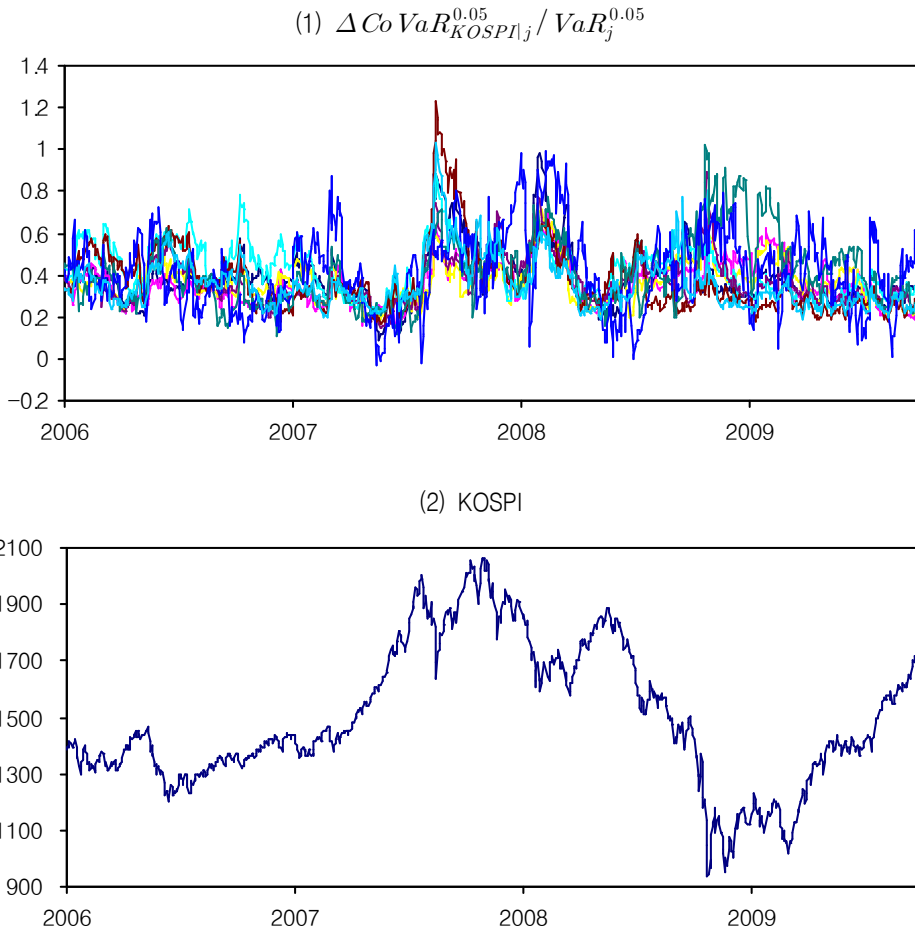
Note: VaR and $\Delta CoVaR$ denotes $VaR_{IBK}^{0.05}$ and $CoVaR_{KOSPI|IBK}^{0.05} - VaR_{KOSPI}^{0.05}$, respectively, in absolute value.

[Figure 5]에 나와 있다. 두 모형 중 정규 분포모형 추정 결과를 이용하여 그렸는데, <Table 7>에서 보는 것처럼 $\Delta CoVaR$ 와 VaR 의 상관계수가 0.865로 가장 높은 경우이다. 그러나 이처럼 높은 상관계수에도 불구하고 $\Delta CoVaR$ 와 VaR 의 일반적인 선형관계에서 상당히 벗어나 있는 추정치들을 많이 찾아볼 수 있다. 예를 들어, [Figure 5]에 표시해 놓은 2007년 8월 21일 추정치와 2008년 10월 15일 추정치를 비교해 보자. 두 시점 간에 은행의 개별 리스크(즉, VaR)는 약 2.5배 가량 차이가 남에도 불구하고 시스템리스크 기여도(즉, $\Delta CoVaR$)는 거의 차이가 없는 것을

알 수 있다.

시간가변 $CoVaR$ 와 관련하여 마지막으로 은행들의 시스템리스크가 개별 리스크와 어떤 관계를 맺으면서 변하는지를 살펴보았다. 개별 리스크가 커질 때 시스템리스크 기여도 역시 커지는 것은 충분히 예상할 수 있으나 그 상대적 정도를 살펴보고자 하는 것이다. 이를 위해 $\Delta CoVaR_{KOSPI|j}^{0.05} / VaR_j^{0.05}$ 의 추이를 살펴보았다. 우리가 특히 관심을 갖는 부분은 은행의 개별 리스크(VaR_j 절댓값)가 커질 때 시스템리스크 기여도($\Delta CoVaR_j$ 절댓값)가 더 빠른 속도로 커지는지 여부이다. 만약 시스템리스크

[Figure 6] Individual Risk and System Risk Contribution



기여도가 개별 리스크에 비해 더 빠른(늦은) 속도로 커진다면 $\Delta Co VaR_j / VaR_j$ 는 크기가 커(작아)질 것이고, 양자의 변화가 비슷하다면 이 비율은 안정적인 모습을 보일 것이다. [Figure 6]에 결과가 나와 있다. 그림 (1)의 $\Delta Co VaR_j / VaR_j$ 추이를 보면, 흥미로운 점을 발견할 수 있다. 앞에서 본 것처럼 $\Delta Co VaR_j$ 의 경

우에는 2008년 9월 중순 이후 글로벌 금융위기가 본격화되면서 급증하는 모습을 보이고 있다. 이는 (결과를 제시하지는 않았지만) VaR_j 의 경우에도 마찬가지이다. 그런데 이들 두 리스크 척도의 비율을 보면, 2008년 9월이 아니라 그보다 1년 전인 2007년 하반기에 급등했던 것을 알 수 있다.

2007년 8~9월은 BNP Paribas의 운용 펀드 환매중단 발표(8월 9일) 및 영국 Northern Rock의 예금인출사태(9월 중순)가 발생함에 따라 국제금융시장이 큰 혼란을 겪은 시점이다. [Figure 6] 그림 (2)의 KOSPI 추이에서 볼 수 있듯이 적어도 KOSPI상으로 보면, 글로벌 금융 위기 충격의 시작 시점이 바로 2007년 하반기이다. 그림은 이 시점에서 VaR_j 에 비해 $\Delta CoVaR_j$ 가 가장 크게 상승한 것을 보여주고 있다. 이는 곧 VaR_j 와 $\Delta CoVaR_j$ 의 두 리스크 척도가 금융위기의 시작 시점에서 가장 차이가 벌어졌다는 것을 의미하며, 그 점에서 (기존의 척도인 VaR_j 로는 포착할 수 없는) $\Delta CoVaR_j$ 의 유용성을 말해 주는 것이라 할 수 있다. 다른 한편으로 $\Delta CoVaR_j / VaR_j$ 가 금융위기의 시작 시점에서 급상승했다는 것은 이것 자체가 금융위기의 전조를 알려주는 중요한 지표로 활용될 수 있다는 것을 의미하는 것일 수도 있다.¹³⁾

IV. 맺음말

은행산업의 리스크 관리는 은행 자신은 물론 전체 금융부문의 안정성에 미치

는 파급효과가 매우 크다. 이 때문에 현재 은행산업의 리스크 관리에 있어서 핵심적인 역할을 하고 있는 VaR 개념의 개선 방향을 모색하는 것은 학술적으로나 현실적으로 중요한 의미를 지닌다고 할 수 있다. 본 연구는 위기의 파급효과나 시스템리스크 기여도를 측정하는 데 유용하게 사용될 수 있는 CoVaR의 개념을 소개하고, CoVaR 추정방법론에 있어서 기존의 분위수 회귀방식이 아닌 모수적 분포함수를 이용하는 방법을 제시했다. 표준적인 정규분포함수는 물론, 금융시 계열 데이터의 초과침도와 비대칭성을 잘 표현하는 S_U -정규분포함수를 이용하여 비조건부 및 조건부로 CoVaR를 추정하는 모형을 소개했다.

이들 모형을 이용하여 한국 은행산업을 대상으로 추정을 실행하여 CoVaR의 현실적 유용성과 각 모형들의 추정 성과를 비교·분석한 결과는 다음과 같이 요약된다. 첫째, 어떤 개별 은행이 위기에 처한 것을 전제로 평가한 시스템리스크 (CoVaR)는 대부분의 경우에 그러한 전제 없이 평가한 비조건부 시스템리스크 (VaR)에 비해 더 큰 것으로 나타났다. 이는 모든 은행들이 시스템리스크에 양(+)의 기여를 하고 있다는 의미이다. 이와 같은 양의 효과는 은행이 더욱 극단적인 위기에 빠져 있는 것을 가정했을 때(즉,

13) 동 비율의 분석을 제안해 주신 검토자께 감사드린다.

$p=0.01$ 일 때) 더 커지는 것으로 나타났다. 둘째, 각 은행의 시스템리스크 기여도가 해당 은행의 독립적인 개별 리스크와 얼마나 관련성을 맺고 있는지를 살펴본 결과, 양자가 어느 정도 상관성을 보이기는 하지만 *CoVaR*의 유용성을 훼손할 만큼은 아닌 것으로 나타났다. 셋째, 모형별 추정 결과를 비교해 보면, 분위수 회귀모형의 경우 p 를 어느 수준으로 정하느냐에 따라 은행별 시스템리스크 기여도 순위가 크게 뒤바뀌는 문제점을 지니고 있는 것으로 파악되었다. 또한 (심각한 약점은 아니지만) 정규분포모형의 경우에

는 리스크 기여도의 절대적 크기에 있어서 은행 간 차이가 매우 적게 나타나는 것을 알 수 있었다. 넷째, S_U -정규분포모형에 비해 다른 두 모형(특히 정규분포모형)이 *CoVaR*를 (절댓값에서) 크게 과소평가하며, p 가 낮아질수록 그 정도가 심해지는 것으로 나타났다. 그러나 이 결과만으로 모형 간 추정 성과의 우열을 말하기는 힘들며, 시뮬레이션 등의 추가적인 연구가 필요하다. 이 경우 표본 내(in-sample) 적합도뿐만 아니라 표본 외(out-of-sample) 검증까지 함께 고려해야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 김진호 · 김윤정, 「CoVaR를 이용한 금융회사 간 리스크 전이 분석」, Working Paper, 이화여자대학교, 2009.
- 여은정, 「금융기관 리스크 평가방법의 개선방안」, 『주간금융브리프』, 제17권 제47호, 한국금융연구원, 2009, pp.12~13.
- 이승환, 「조건부 도산확률을 이용한 은행부문의 시스템리스크 측정」, 금융경제연구 Working Paper 428호, 한국은행, 2010.
- 최필선, 「새로운 다변량 분포함수를 이용한 GARCH 모형 추정」, 『재무연구』, 제18권 제2호, 2005, pp.185~208.
- 한국은행, 『금융안정보고서』, 2010.
- Adrian, T. and M. Brunnermeier, “CoVaR,” FRB of New York, 2009.
- Brunnermeier, M., A. Crockett, C. Goodhart, A. Persaud, and H. Shin, “The Fundamental Principles of Financial Regulation,” 11th Geneva Reports on the World Economy, 2009.
- Engle, R., “Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models,” *Journal of Business and Economic Statistics* 20(3), 2002, pp.339~350.
- Engle, R. and S. Manganelli, “CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles,” *Journal of Business and Economic Statistics* 22(4), 2004, pp.367~381.
- Fong, T., L. Fung, L. Lam, and I. Yu, “Measuring the Interdependence of Banks in Hong Kong,” Working Paper, Hong Kong Monetary Authority, 2009.
- IMF, “Assessing the Systemic Implications of Financial Linkages,” *Global Financial Stability Report*, Chapter 2, 2009.
- Johnson, N., “Systems of Frequency Curves Generated by Method of Translation,” *Biometrika* 36, 1949a, pp.149~176.
- _____, “Bivariate Distributions Based on Simple Translation Systems,” *Biometrika* 36, 1949b, pp.297~304.
- Koenker, R. and H. Kevin, “Quantile Regression,” *Journal of Economic Perspectives* 15(4), 2001, pp.143~156.